ÜBER SCHÜTZEN UND ORIENTIERUNGSLÄUFER: GEDANKENEXPERIMENTE IN DER RELATIVITÄTSTHEORIE

Eine Maturitätsarbeit an der
KANTONSSCHULE LIMMATTAL

vorgelegt von
BRUNO WETTON
Klasse W6a
im Fach Physik

betreut von
Christian Helm, Dr. rer. nat.

2023

Abstract

Ziel dieser Maturitätsarbeit war, durch Gedankenexperimente diverse Effekte der speziellen Relativitätstheorie Einsteins ausfindig zu machen. Die Längenkontraktion und die Zeitdilatation wurden unter dem Vorläufer der Relativitätstheorie, der Lorentz'schen Äthertheorie, bewiesen. Danach wurde die Form der Lorentz-Transformationen ausfindig gemacht. Es wurde die Unmöglichkeit der inertialen Bewegung, welche schneller als die Lichtgeschwindigkeit ist, in der speziellen Relativitätstheorie bewiesen. Die Unmöglichkeit jeglicher Bewegung schneller als die Lichtgeschwindigkeit wurde danach aufgezeigt. Letztlich wurde eine Rotation zwischen inertial bewegten Bezugssystemen festgestellt, was der Nichtkommutativität verschiedener Lorentz-Transformationen entspricht.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ziel dieser Arbeit war die Erklärung von diversen Gedankenexperimenten der speziellen Relativitätstheorie. Die Gedankenexperimente wurden durch eigene Arbeit durchdacht. Dabei wurde Bezug auf die Grundlagen der klassischen Kinematik sowie den historischen Kontext der Äther-Theorie genommen. Besonders wurden drei Effekte der speziellen Relativität analysiert: erstens, die Längenkontraktion und Zeitdilatation; zweitens, die Unmöglichkeit einer schneller-als-Licht-Bewegung und drittens, die Thomas-Rotation.
Die ersten zwei Effekte sind stets bekannte Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie. Beim ersten hatte in grösserem Detail als sonst üblich auf den historischen Kontext eingegangen werden sollen. Die zwei Postulate Einsteins sollten aus der Geschichte der Äther-Theorien klar hervorgehen.
Für die Schneller-als-Licht-Bewegung wurde verstärkt die Grundlage der Kausalität untersucht, aufgrund dessen diese Bewegung unmöglich ist. Die Hauptquelle für dieses Kapitel war [3], da dieses eine gute grundsätzliche Definition der Kausalität besitzt, sowie weitere Gedanken zu dessen Verbindung mit der Mechanik und Kinematik.
Die Thomas-Rotation wurde für einen einfachen Spezialfall betrachtet. Diese Rotation zwischen Bezugssystemen sollte sich aus nicht-kollinearen Lorentz-Boosts ergeben. Dem liegt eine nicht-Kommutativität zweier solche Lorentz-Transformationen zugrunde.

Kapitel 2

Hauptteil

2.1 Die Ursprünge der speziellen Relativitätstheorie

Um die Sachverhältnisse der speziellen Relativitätstheorie Einsteins erfolgreich zu schildern, besteht Bedarf nach genauer Definition der Grundbegriffe der Physik. Deswegen müssen alle Sachverhältnisse genau, auf den Grundlagen der klassischen Kinematik aufbauend, erklärt werden.
Die klassische Kinematik beruht als Theorie auf die Beschreibung von *Bewegungen* in einem *Raum*. Im Alltag weiss man, was eine Bewegung ist; es fehlt aber eine motivierte, physikalische Definition dieser! Ausserdem ist eventuell unklar, was unter einer physikalischen Beschreibung verstanden wird. Dabei ist dies nicht schwer begreiflich: Eine physikalische Beschreibung ist eine Beschreibung eines Sachverhältnisses. «Wenn man eine Variable vergrössert, verkleinert sich eine andere» ist eine (ungenaue) qualitative physikalische Beschreibung.
Und bei der Definition von solchen Begriffen treten (durch die Verwendung anderer Begriffe) neue Fragen auf. Was ist eine Variable? Eine Variable ist in diesem Kontext ein Ersatz für eine Zahl (und eventuell auch eine Einheit), deren genauer Wert für den Zusammenhang im Allgemeinen irrelevant ist. Die Zahl sollte aber für die Beschreibung eines Objektes relevant sein. Man kann zum Beispiel sagen, dass ein Würfel in Wasser eine Auftriebskraft erfährt, mit

$$F_b = \rho g V,$$

wo F_b die Kraft, ρ die Dichte von Wasser, g die Gravitationskonstante und V das Volumen des Würfels ist. Ausserdem kann gesagt werden, dass ein Holzwürfel ein Volumen von $125\,\mathrm{cm}^3$ besitzt. Dieser genaue Wert ist aber für die Existenz der Auftriebskraft irrelevant, da dasselbe Gesetz für alle Würfel gilt. Die Form physikalischer Gesetze hängt nicht von den genauen Zahlenwerten der Variablen

ab. Diese Art der Unabhängigkeit, in welchen die Form der physikalischen Gesetze nicht von Wert oder Einheit der beschriebenen Quantitäten abhängen, wird in der Physik als Symmetrie bezeichnet. Spezifisch geht es hier um eine Eichsymmetrie.
Unter diesen Variablen befinden sich die Koordinaten: Die x-, y- und z-Achsen werden sehr oft[1] für die Beschreibung von Positionen verwendet. Dabei existiert ein *Raum*, in welchem sich *Punkte* mit eindeutigen Koordinaten befinden. Diese Punkte haben eine *Position*, welche durch genau drei Koordinaten beschrieben wird [10].
Für die Beschreibung von Positionen im Allgemeinen reichen die Koordinaten x, y und z aus. Für die Beschreibung eines spezifischen Punktes werden Zahlenwerte benötigt. Dabei entsteht ein Problem: Auch wenn man Massstäbe hat, welche Distanzen zwischen Punkten messen können, kann man damit nur die relative Entfernung zwischen zwei Punkten bestimmen. Eine Person, Alice, kann, zum Beispiel, ein Punkt $O(x_O,y_O,z_O)$ bestimmen, wo Punkt O Koordinaten x_O in x-Richtung, y_O in y-Richtung und z_O in z-Richtung hat. Daraus kann sie die Koordinaten aller weiteren Punkte durch ihre Entfernung zu O bestimmen. Ihr fehlt aber immer noch die Koordinaten von O! Dieses Problem wird durch die Einführung eines Ursprunges gelöst. Dafür setzt Alice die Koordinaten von O alle gleich 0. Die Koordinaten aller weiteren Punkte ergeben sich aus Messungen der Entfernungen zu O in x-, y- und z-Richtung. Alice misst also in ihrem *Bezugssystem* für Punkt $P(5, 5, 4)$ die Entfernungen 5, 5 und 4 in x-, y- beziehungsweise z-Richtung, vom Ursprung aus betrachtet.
Dabei tritt aber immer noch ein Problem auf: Wie wird der Ursprung entschieden? Man stelle sich dabei vor, es hat einen weiteren Betrachter namens Bob. Bob bestimmt auch einen Ursprung. Alice und Bob haben beide aus der eigenen Sicht den Ursprung am Punkt (0, 0, 0). Es kann aber sein, dass Bobs Ursprung im Koordinatensystem von Alice nicht die Koordinaten (0, 0, 0) hat! Dieses Problem löst Alice mit einer *Eich-Transformation*. Falls Bob sagt: «Punkt P' hat die Koordinaten (3, 4, -3)», kann Alice daraus die Position des Punktes in ihrem eigenen Bezugssystem bestimmen. Dafür bestimmt sie zuerst Bobs Ursprung, B, welches sich in diesem Beispiel für Alice an der Position (1, 2, 0) befindet. Danach addiert sie einfach die Koordinaten, da Bob die Position von P' auch anhand einer Distanzmessung bestimmt hat. In Alices Bezugssystem hat also derselbe Punkt die Koordinaten (4, 6, -3). Alice und Bob sollten ausserdem auf ihre Formulierungen achten – Bob misst die Koordinaten von Punkt P' im eigenen Bezugssystem. Er kann also nur Folgendes sagen: «Punkt P' hat *in meinem Bezugssystem* die Koordinaten (3, 4, -3).»
In der Relativitätstheorie werden viele Kurzformulierungen für solche Sachverhältnisse verwendet. So *befinden sich* Alice und Bob an ihren jeweiligen Koordi-

[1] In dieser Arbeit werden Kugel- und Zylinderkoordinaten ausser Betracht gelassen.

natenursprüngen. Punkt P' in Bobs Bezugssystem ist derselbe wie Punkt P in Alices Bezugssystem, befinden sich also gleichenorts im Raum. Für die allgemeine Beschreibung dieser Transformation werden Formeln verwendet:

$$x = x' + x_B, \tag{2.1.1}$$
$$y = y' + y_B, \tag{2.1.2}$$
$$z = z' + z_B. \tag{2.1.3}$$

Wo die Koordinaten mit Hochstrich (x', y' und z') von Bob, diejenigen ohne Hochstrich (alle weiteren Koordinaten) von Alice gemessen werden. Die Koordinaten mit tiefgestelltem B sind die Koordinaten des Ursprungs von Bob im Bezugssystem von Alice. Hier wurde angenommen, dass Alice und Bob identische Massstäbe besitzen – falls Bobs Massstäbe im Bezug auf diejenigen von Alice eine gestauchte Achse hätten, so müsste man dies in der Transformation durch einen zusätzlichen Faktor berücksichtigen.

2.2 Die Zeit vor der speziellen Relativitätstheorie

Um die Grundlage der klassischen Kinematik weiterhin zu erforschen, muss noch die Bewegung definiert werden. Dies kann nur unter der Einführung einer neuen Variable erfolgen: Die Zeit, t. Es findet eine Bewegung statt, falls die Position eines Punktes von der Zeit abhängt. Punkt P mit y-Koordinate y_P ist in Bewegung, falls

$$y_P = f(t), \tag{2.2.1}$$

wo f eine beliebige nicht-konstante Funktion ist.
Wenn sich Punkte bewegen, dann entsteht ein Problem mit der Längenmessung. Die Messung der Distanz zwischen zwei Punkten kann nach der Zeit variieren, da sich Punkte bewegen können. Um Distanzen zu messen, muss man also immer gleichzeitig die Positionen der beiden Punkte bestimmen.
Was passiert, wenn der Ursprung in Bewegung ist? Klarer gesagt, Bobs Ursprung (vergleiche mit dem vorherigen Kapitel) kann relativ zu Alices Ursprung in Bewegung sein. Wenn Bob zu einem Zeitpunkt t' am Punkt Q' die Koordinaten x'_Q, y'_Q und z'_Q misst, was sind die Koordinaten dieses Punktes in Alices Bezugssystem? Diese Frage wurde zur Zeit Newtons behandelt. Dazu setzte man voraus, dass sich Bobs Ursprung gleichförmig bewegt und sich bei $t = 0$ bei Alices Ursprung befindet, also dass

$$x_B = v_x t, \tag{2.2.2}$$
$$y_B = v_y t, \tag{2.2.3}$$
$$z_B = v_z t, \tag{2.2.4}$$

mit v_n die Geschwindigkeit von Bobs Ursprung in Richtung n. Ein Bezugssystem, dessen Ursprung sich gleichförmig (oder gar nicht) bewegt, nennt man *inertial.*
Um Punkte in bewegten inertialen Bezugssystemen zu beschreiben, werden zwei Prinzipien vorausgesetzt. Erstens, das Relativitätsprinzip: Die Gesetze Newtons gelten in jedem inertialen Bezugssystem mit derselben Form. Das heisst, ein Betrachter, der in einem bewegten Zug ein Experiment macht, misst das gleiche wie ein Betrachter, der dasselbe Experiment ausserhalb des Zuges macht; vorausgesetzt, der Zug beschleunige sich nicht. Zweitens setzte man den absoluten Zeitfluss voraus [7]. Dafür muss, in jedem Bezugssystem,

$$t = t' \tag{2.2.5}$$

gelten. Das heisst, die Zeit fliesst für Alice und Bob an jedem Punkt gleich schnell. Es heisst auch, synchronisierte Uhren bleiben synchronisiert, unabhängig von ihren Bewegungen. Ausserdem ist in diesem Modell ein bestimmter Zeitpunkt für Alice genau derselbe Zeitpunkt für Bob. In dieser Arbeit wird dies als absolute Gleichzeitigkeit bezeichnet.
Um also die Alice-Koordinaten zu einem gewissen Zeitpunkt zu bestimmen, muss man nur die Bob-Koordinaten und die Koordinaten von Bobs Ursprung zum selben Zeitpunkt ermitteln. Dann wird die Eich-Transformation angewandt:

$$\begin{aligned} t &= t', && (2.2.6a)\\ x &= x' + x_B, && (2.2.6b)\\ y &= y' + y_B, && (2.2.6c)\\ z &= z' + z_B. && (2.2.6d) \end{aligned}$$

Unter Einsetzen von Gleichung (2.2.2) werden diese Formel in folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} t &= t', && (2.2.7a)\\ x &= x' + v_x t, && (2.2.7b)\\ y &= y' + v_y t, && (2.2.7c)\\ z &= z' + v_z t. && (2.2.7d) \end{aligned}$$

Allgemein, falls sich Bob mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_B$ bewegt, gilt:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_B t, \tag{2.2.8}$$

mit Positionsvektor $\vec{r}$ eines beliebigen Punktes.

Falls sich Bob entlang der x-Achse bewegt, sein Geschwindigkeitsvektor also parallel zur x-Achse ist, gelten die vereinfachten Transformationsgesetze

$$t = t', \tag{2.2.9a}$$
$$x = x' + vt, \tag{2.2.9b}$$
$$y = y', \tag{2.2.9c}$$
$$z = z'. \tag{2.2.9d}$$

Das sind die bekannten Galilei-Transformationen [12, p. 21ff.]. Das Galilei'sche Relativitätspostulat wurde in der speziellen Relativitätstheorie von Einstein wiederverwendet. Als Modell sind die Galilei-Transformationen für viele Alltagssituationen sehr gut gebräuchlich. Dennoch stellen sie die Realität ungenau dar – in der speziellen Relativitätstheorie Einsteins gelten sie nur näherungsweise dann, wenn ein Betrachter sich mit einer kleinen Geschwindigkeit bewegt. Wie man sehen wird, ist die postulierte absolute Gleichzeitigkeit dabei die kritische Annahme. Die Anwendung dieser auf das Licht zeigte am klarsten dessen Ungenauigkeit.

2.3 Der Äther

Um die Jahrhundertwende litt die Physik unter einem Problem: Die Theorie der Elektromagnetismus von Maxwell sagte hervor, dass die Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen einen bestimmten Wert hatte[1]. Da Licht eine elektromagnetische Welle ist, nennt man diese Geschwindigkeit *Lichtgeschwindigkeit*. Man wusste aber nicht, in welchem Medium sich Licht verbreitete. Schallwellen, zum Beispiel, breiten sich in der Luft aus. Die Geschwindigkeit von Schallwellen wird relativ zu der Geschwindigkeit der Luft verstanden[2]. Physiker stellten sich nun die Frage: «Relativ zu was breitet sich Licht mit Lichtgeschwindigkeit aus?»
Bis die spezielle Relativitätstheorie allgemein durch Physiker akzeptiert wurde, war es üblich, die Existenz eines Mediums anzunehmen, der sogenannte Äther. Die physikalischen Eigenschaften dieses Äthers wurden in vielen Experimenten untersucht. 1887 versuchten Michelson und Morley zu beweisen, dass der Äther «ruht», also dass die Erde sich im Bezugssystem des Äthers bewegt. Ihr Experiment war aus zwei lotrechten Achsen aufgebaut, in dessen Richtungen Licht geleitet und gespiegelt wurde (vergleiche Abbildung 2.1). Hätte sich die Erde durch den Äther in die Richtung der einen Achse bewegt, so wäre die Bahn des Lichts auf diese Achse verlängert gewesen. Der Spiegel würde sich von der Lichtquelle «weg» bewegen, was die Bahn des Lichtes vergrössern würde. Auf der lotrechten Achse bewegte sich

[1] Dieser Wert ist heutzutage genau 299 792 458 m/s [14].
[2] Wenn jemand in einem fliegenden Flugzeug spricht, bewegt sich der Schall für den Passagier mit derselben Geschwindigkeit wie in einem ruhendem Flugzeug.

der Spiegel «horizontal», sodass sich das Licht in diesem Fall auf einer diagonalen Bahn befinden würde. Es hätten sich beide Bahnen verlängert – die parallele aber um mehr als die lotrechte! Deswegen erwarteten Michelson und Morley, diesen Unterschied als Interferenz zu betrachten.

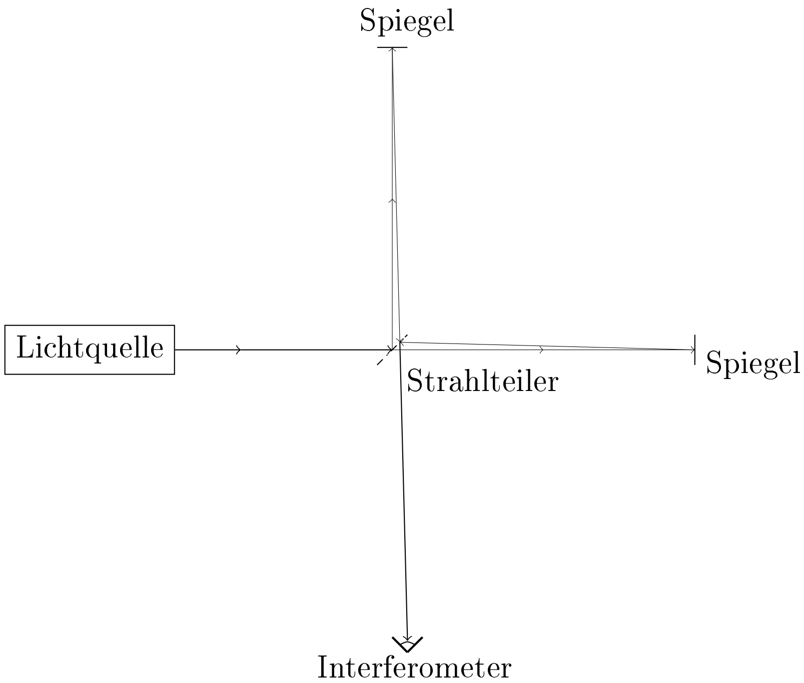

Abbildung 2.1: *Aufbau des Michelson-Morley-Experiments. Das Licht tritt aus der Lichtquelle heraus, teilt sich am Strahlteiler und wird von den Spiegeln reflektiert. Danach wird es vom Strahlteiler wieder vereinigt und in den Interferometer geleitet. Für visuelle Klarheit werden hier die Unterschiede zwischen den Lichtbahnen desselben Spiegels hervorgehoben – im Experiment laufen die Lichtstrahlen entlang des genau gleichen Pfades.*

Heutzutage bezeichnet man den Michelson-Morley-Experiment als «berühmtestes versagtes Experiment». Sie fanden ein Null-Resultat, also keinen Unterschied in den beiden Lichtbahnen. Dieses Null-Resultat wurde durch verschiedene Physiker unterschiedlich interpretiert: Viele postulierten ein *Äther-Drag*, also dass die Erde den Äther «mitschleppt». Diese Theorie hatte weitere Probleme darin, andere Phänomene zu erklären [17]. Ausserdem blieben weitere physikalische Eigenschaften des Äthers unklar, da dieses nur *ad hoc* konstruiert wurde, um Phänomene der Elektrodynamik (wie die Lichtgeschwindigkeit) zu erklären. Eine physikalische Erklärung des Lichtes ohne Äther wäre darum bevorzugt gewesen.
Nichtsdestotrotz postulierten Lorentz und Poincaré die Existenz des Äthers. Lorentz' Interpretation des Null-Resultats half ihm dazu, viele Effekte der speziellen Relativität herzuleiten [17, p. 391ff.].

2.3.1 Das Lorentz'sche Michelson-Morley-Experiment

Lorentz' Interpretation des Null-Resultates erlaubte ihm, die Existenz eines stationären Äthers weiterhin zu postulieren, obwohl viele andere Physiker (vor allem auch Michelson und Morley) darin einen Widerspruch sahen. Es folgen mehrere Grafiken und Berechnungen über das Michelson-Morley-Experiment, die den Widerspruch aufzeigen sollten.

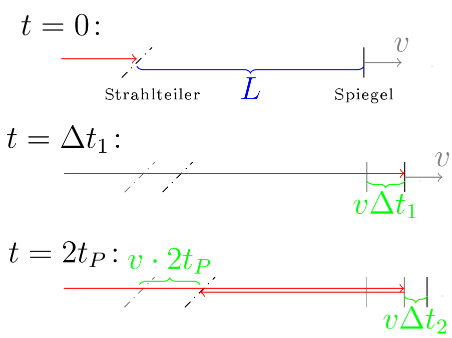

Abbildung 2.2: *Parallele Lichtbahn in einem Michelson-Morley-Experiment, zu drei verschiedenen Zeitpunkten, aus der Sicht des Äthers. Das Licht (der rote Pfeil) tritt beim Strahlteiler (gepunktete Linie) aus und bewegt sich entlang der Achse, welche Länge* L *besitzt. Nach Zeit* Δt_1 *trifft es den Spiegel (solide Linie), welches den Lichtstrahl reflektiert. Dann, als* $2t_P$ *verstrichen ist, trifft der Lichtstrahl wieder den Strahlteiler. In dieser Zeit hat sich das Gerät relativ zum Äther bewegt – ehemalige Positionen der Elemente sind grau dargestellt. Es besitzt eine Geschwindigkeit* v *(grauer Pfeil), die Bewegungen der Elemente sind mit grünen Klammern markiert.*

Das Michelson-Morley-Experiment besteht, wie in Abbildung 2.1 abgebildet, aus zwei Achsen: Eine lotrechte und eine parallele Achse. Das Licht tritt gleichzeitig beim Strahlteiler auf beiden Achsen aus und bewegt sich während einer bestimmten Zeitspanne, welche von den Längen der Achsen abhängt. Das Experiment bewegt sich durch den Äther – das heisst, die Länge der Lichtbahn verlängert sich. Um die vergangene Zeit auf der parallelen Achse zu berechnen, kann man sie in Abschnitte unterteilen. $2t_P$ ist die Zeit, die das Licht insgesamt braucht, um vom Strahlteiler aus den Spiegel zu treffen und zum Strahlteiler zurückzukehren. Δt_1 ist die Zeit zwischen Durchgang des Strahlteilers und Auftreffen beim Spiegel, Δt_2 die Zeit zwischen Spiegel und Strahlteiler. Die räumliche Distanz zwischen diesen zwei Elementen betrage L. Die Lichtgeschwindigkeit ist, vom Äther aus gemessen, c. Spiegel, Strahlteiler und Betrachter bewegen sich durch den Äther mit einer grossen Geschwindigkeit v. Man rechnete mit der Geschwindigkeit der Erde für v, da man annahm, die Erde bewege sich durch den Äther. Somit gilt einerseits, für die Bahn des Lichts zum Spiegel,

$$c\Delta t_1 = v\Delta t_1 + L \Rightarrow \tag{2.3.1}$$
$$\Delta t_1 = \frac{L}{c-v}; \tag{2.3.2}$$

wo sich die Lichtbahn um $v\Delta t_1$ wegen der Bewegung der Erde verlängert. Andererseits, für die (um $v\Delta t_2$ verkürzte) Bahn des Lichts zurück zum Strahlteiler, gilt

$$c\Delta t_2 = L - v\Delta t_2 \Rightarrow \tag{2.3.3}$$
$$\Delta t_2 = \frac{L}{c+v}. \tag{2.3.4}$$

Die Addition dieser ergibt die totale Zeitdauer, die das Licht auf dieser Achse braucht:

$$\begin{aligned} 2t_P &= \Delta t_1 + \Delta t_2 = \\ &= \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \\ &= \frac{2L}{c}\gamma^2, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

dabei ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}. \tag{2.3.6}$$

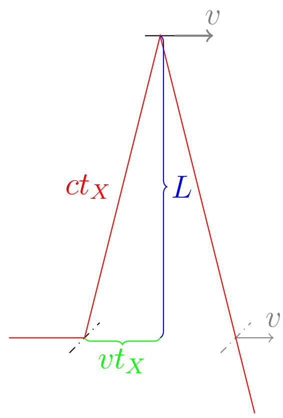

Abbildung 2.3: *Lotrechte Lichtbahn in einem bewegten Michelson-Morley-Experiment aus der Sicht des Äthers. Der Lichtstrahl tritt beim Strahlteiler aus, trifft nach t_X den Spiegel, welcher eine Entfernung L zum Strahlteiler besitzt und dann wiederum, nach $2t_X$, den Strahlteiler. Während dieser Zeit bewegt sich das Gerät mit einer Geschwindigkeit v.*

Betrachtet man nun die lotrechte Achse, hat es einen Unterschied in der vergangenen Zeit. Man vergleiche Abbildung 2.3 – die Achse schneidet mit der Bewegungsrichtung einen rechten Winkel. Wenn $2t_X$ die Zeit ist, die das Licht für den Rundgang vom und zum Strahlteiler braucht, dann kann man den Satz des Pythagoras anwenden:

$$(ct_X)^2 = (vt_X)^2 + L^2 \Rightarrow \tag{2.3.7}$$

$$2t_X = \frac{2L}{c}\gamma. \tag{2.3.8}$$

Beide Zeiten, $2t_P$ und $2t_X$, unterscheiden sich um einen Faktor γ voneinander. Aus diesem Grund erwarteten Michelson und Morley, Interferenz zu sehen, da dieser Unterschied die Phasen der Lichtwellen verändert haben sollte! Sie betrachteten keinerlei solche Interferenz. Um dies zu erklären, griffen FitzGerald qualitativ und Lorentz quantitativ auf eine Verzerrung der Längen der Achsen zurück [6]. Dabei ist L_X die Länge der zur Bewegung lotrechten Achse, L_P die Länge der parallelen Achse.

$$2t_P = 2t_X, \tag{2.3.9}$$

$$\frac{2L_P}{c}\gamma^2 = \frac{2L_X}{c}\gamma, \tag{2.3.10}$$

$$L_P = \frac{L_X}{\gamma}. \tag{2.3.11}$$

Damit $2t_X$ und $2t_P$ gleich sind, hatte die parallele Länge eine Verkürzung um den Faktor γ erfahren sollen! Diese Verkürzung, oder damals Lorentz-FitzGerald-Kontraktion, wäre durch Michelson und Morley nicht messbar gewesen – ihre Massstäbe hätten sich auch verkürzt, da sich die gesamte Erde durch den Äther bewegt! Deswegen schoess Lorentz, dass Michelson und Morley auf falscher Weise die Längenkontraktion nicht in ihren Berechnungen berücksichtigt hatten.
Aus diesem Prinzip des stationären Äthers leitete Lorentz viele Gesetze der Relativität her: Sowohl die Längenkontraktion als auch die Zeitdilatation, sowie die (immer noch nach ihm benannten) Lorentz-Transformationen. Trotz diesen grossen Leistungen wurde er nicht als «Erfinder der Relativitätstheorie» bezeichnet. Grund dafür war, dass er die Existenz des Äthers weitgehend akzeptierte. Er unterschied zwischen dem «wahren» Bezugssystem des ruhenden Äthers und dem «falschen» Bezugssystem des Geräts. Die Lorentz'sche Äther-Theorie postulierte also die Existenz des Äthers und ihre Effekte wurden von diesem Postulat abgeleitet [9, p. 191ff.].
Allgemein gilt in der Wissenschaft: Je weniger Postulate, desto eleganter ist die Theorie. Dieses Prinzip der Sparsamkeit ist als Rasierklinge des Ockham bekannt. Dennoch soll eine physikalische Theorie die Realität zu einem gewissen Grad modellieren – je komplizierter der Sachbereich, desto mehr muss postuliert werden.

Die Theorie von Lorentz, um die Realität modellieren zu können, postulierte die Existenz des Äthers, dessen Existenz noch nie bewiesen worden war. Falls diese notwendig gewesen wäre, um die Ausbreitung des Lichtes zu erklären, wäre sie eine akzeptable Annahme gewesen. Doch entpuppte sich der Äther als unnötig.

2.4 Die Postulate der speziellen Relativitätstheorie

1905 veröffentlichte Albert Einstein die Schrift «Zur Elektrodynamik bewegter Körper» [5]. In dieser entwickelte er eine Erklärung für die Bewegung des Lichts ohne Rückgriff auf ein Äther, in welchem sich das Licht verbreitete. Dabei stellte er zwei Postulate auf:

Postulat 1. *Die Gesetze der Physik haben in jedem inertialen Bezugssystem dieselbe Form.*

Postulat 2. *Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in jedem inertialen Bezugssystem denselben Wert.*

Die Theorie, die auf diesen zwei Postulaten aufgebaut wurde, nennt man die spezielle Relativitätstheorie. Das Licht breitet sich also in der speziellen Relativitätstheorie immer mit derselben Geschwindigkeit aus. Damit ist angedeutet, dass das Licht kein Medium braucht, um sich auszubreiten. Im selben Jahr behauptete Einstein, Licht sei aus Teilchen zusammengesetzt, um den photoelektrischen Effekt zu erklären. Teilchen brauchen kein Medium, um sich zu verbreiten – sie bewegen sich nach den Newtonschen Gesetzen.
Aus nur diesen Postulaten leitete er die Zeitdilatation und Längenkontraktion her, welche zuvor durch Lorentz und Larmor beziehungsweise Lorentz und FitzGerald mit dem Äther hergeleitet worden war. Deswegen erklärte Einsteins Theorie auch das Michelson-Morley-Experiment.
Wie konnte Einstein Sachverhältnisse wie die Längenkontraktion und Zeitdilatation nur von diesen einfachen Prinzipien beweisen? Unter Betracht des vorherigen Abschnittes fällt auf, dass der gesamte Beweis den Postulaten (bis auf die Annahme der Existenz eines Äthers) nicht widerspricht. Solange man annimmt, dass statt eines Äther-Bezugssystems das Experiment aus Sicht eines (relativ zum Labor) bewegten Betrachters beobachtet wird, wird die Längenkontraktion auch so bewiesen.

2.4.1 Das Einstein'sche Michelson-Morley-Experiment

Man stelle sich vor, anstatt einer Erde, welche sich durch einen unsichtbaren «Äther» bewegt, findet ein zum Michelson-Morley-Experiment analoger Versuch in

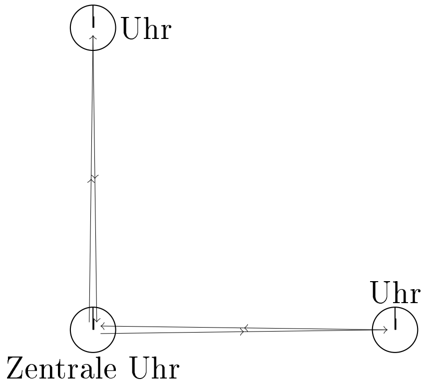

Abbildung 2.4: *Aufbau des Michelson-Morley-Experiments aus der Sicht des mitbewegenden Betrachters, M'. Die zentrale Uhr sendet zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Lichtpuls zu den beiden Uhren aus, die das Licht gespiegelt zurückwerfen und ihre Zeiten synchronisieren.*

einem Zug statt, welcher sich mit der Geschwindigkeit v in die positive x-Richtung bewegt. Die zwei Achsen des Experiments liegen jeweils parallel und senkrecht zur x-Achse. Beobachter M' steht im Zug und sieht deswegen ein stationäres Experiment. Beobachter M steht auf dem Perron und sieht durch die Fensterscheiben des Zuges auf das Experiment. Er hat eine Kette von Uhren, welche entlang des Gleises ruhen und alle miteinander synchronisiert sind. Die Achsen von M und M' sind parallel und bei $t = 0$ befinden sich beide an der gleichen Position. Die Zeit ist, wie bald bewiesen wird, relativ; die gemessenen Zeiten der unterschiedlichen Ereignisse unterscheiden sich je nach Betrachter. Daraus ergibt sich ein Problem der Definition der Zeit. Dies löste Einstein mit einer funktionalen Definition: Die Zeit ist das, was eine Uhr misst. Dafür muss sich aber die Uhr an der gleichen Position befinden wie das Ereignis, dessen Zeit gemessen wird. Deswegen braucht M eine unendlich lange, unendlich dichte Kette von Uhren, um an jedem Punkt die Zeit zu messen.
Wie synchronisiert M seine Uhren? Man nehme an, zwei Uhren sind aufgestellt, sodass sie eine Distanz l zueinander haben. Wenn eine Uhr einer weiteren einen Lichtpuls sendet, so verstreicht zwischen Ausstrahlung und Erleuchtung ein Zeitintervall t_L. Wenn nun die zweite Uhr den Lichtstrahl reflektiert, so verstreicht nochmal dasselbe Zeitintervall, da angenommen wird, dass der Raum *isotrop* ist; dass keine absolute Richtung existiert, in welchem die Lichtgeschwindigkeit schneller ist als in einer anderen. Die erste Uhr nimmt also zwischen der Aussendung und dem Wiedereintreffen des Lichts bei der ersten Uhr eine Zeitdifferenz von $2t_L$ wahr. Oder, in der Sprache der Relativität ausgedrückt, zwischen dem Ereignis des Ausscheidens des Lichtes und dem Ereignis des Wiedereintreffens, hat es eine Zeitdifferenz von $2t_L$. Aus dem zweiten Postulat, der Konstanz der Lichtgeschwin-

digkeit, ist diese Zeitdifferenz durch

$$2t_L = \frac{2l}{c} \tag{2.4.1}$$

gegeben. Das *Ereignis* der Reflexion des Lichtes bei der zweiten Uhr findet aufgrund der Isotropie des Raumes um die Zeit t_L statt. Diese Methode der Uhrensynchronisation wurde durch Einstein in seinen Gedankenexperimenten verwendet und heisst also Einstein-Synchronisation[1].

Ereignisse sind hier Punkte, die mit einer zusätzlichen Zeitkoordinate versehen sind. Deswegen spricht man in der Relativitätstheorie auch von der vier-dimensionalen Raum-Zeit – der drei-dimensionale Raum wird mit der Zeit ergänzt. Ereignisse werden auch in Kurzform $E(ct,x,y,z)$ geschrieben, analog zu den Punkten des drei-dimensionalen Raumes, wo c eine Konstante ist, dessen Dimensionen so bestimmt sind, dass die Dimensionen von ct denen der anderen drei Koordinaten entspricht. Dafür muss c Einheiten der Geschwindigkeit haben. Da die Lichtgeschwindigkeit für die spezielle Relativitätstheorie zentral ist, verwendet man diese als Konstante.

Man nehme also an, der Betrachter ausserhalb des Zuges habe eine Kette von synchronisierten Uhren entlang der Schiene, welche auf der x-Achse liegt. Er sehe nun zu, wie der Betrachter im Zug drei Uhren synchronisiert. Eine Uhr liegt in der Mitte, eine ist in der positiven x-Richtung und eine in der positiven y-Richtung verschoben. Der Betrachter im Zug, M', stellt nun die mittlere Uhr so ein, dass sie einen Lichtpuls zur Uhr in der x-Richtung und einen gleichzeitig zur Uhr in der y-Richtung aussendet. Diese zwei sind so eingestellt, das sie den Lichtpuls direkt reflektieren. Man vergleiche Abbildung 2.4. Dieses Experiment ist analog zum Michelson-Morley-Experiment. Die mittlere Uhr nimmt die Position des Strahlteilers ein, die anderen zwei Uhren die Positionen der Spiegel.

M' sieht ein stationäres Experiment, für ihn sind auch die Achsen gleich lang. Deswegen denkt er, beide Uhren laufen gleich schnell und verwendet die gemessenen Werte, um die Uhren zu synchronisieren. Zwischen Ausstrahlung und Wiedereintreffen verstreicht, in seinem Bezugssystem gemessen, die Zeit 2τ, weswegen zwischen Versand und Reflexion die Zeit τ verstreicht – diese Reflexion geschieht bei beiden Uhren in seinem Bezugssystem gleichzeitig.

Der Betrachter auf dem Perron sieht diese Tatsachen anders. Für ihn haben sich, wie im Michelson-Morley-Experiment, die Spiegel-Uhren bewegt! Man betrachte Abbildungen 2.2 und 2.3. Hierin sieht man klar, dass die Achsen sich für M bewegen. Für M verstreicht auf der lotrechten Achse die Zeit t_X zwischen Versand

[1] Tatsächlich wurde diese Methode seit einer Weile durch Telegramm-Netze angewandt, um Uhren zu synchronisieren. Als Einstein im Patentbüro in Bern arbeitete, hatte er vermutlich mit solchen Synchronisationskonventionen Kontakt [7].

und Reflexion. Das Verhältnis zwischen τ und t_X ist, weil die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, durch Gleichungen (2.3.8) und (2.3.6) gegeben:

$$t_X = \gamma\tau. \tag{2.4.2}$$

Die Wiederverwendung der Gleichungen der Lorentz'schen Herleitung sind dadurch gerechtfertigt, dass Betrachter M die Rolle des Äthers nun einnimmt – das Licht bewegt sich relativ zu ihm mit einer konstanten Geschwindigkeit. Die Uhren von M', die sich bei $x = 0$ befinden, also die zentrale und die y-verschobene Uhr, laufen um den Faktor γ langsamer als die Uhren von M. Ausserdem, da Δt_1 und t_X nicht gleich sind, geschehen die Reflexionen des Lichtes im Bezugssystem von M nicht gleichzeitig! Die Gleichzeitigkeit ist also relativ.
Da die Zeitmessung von M' und M sich unterscheiden, muss die Längenmessung genau in Betracht genommen werden (vergleiche Abschnitt 2.2). Man weiss, dass die Querlängen, also die Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung, gleich bleiben. Dies muss sein, weil sonst die Achsen des Zuges je nach Bezugssystem breiter oder schmäler als die (relativ dazu bewegten) Schienen des Gleises wären. Das wäre offenbar unmöglich. Deswegen müssen die Querlängen y und z so transformieren, dass

$$y' = y \text{ und} \tag{2.4.3}$$
$$z' = z. \tag{2.4.4}$$

Hier wird in der Notation ein Hochstrich auf diejenigen Variablen gesetzt, die im Bezugssystem des Zuges und M' gemessen werden: y', z', später auch x' und t'). Die Koordinaten ohne Hochstrich (y, z, x, t) werden im Bezugssystem des Perrons und M gemessen.
Für die parallele Länge x muss folgender Aspekt in Betracht genommen werden: Das Wiedereintreffen des Lichtes aus beiden Achsen bei der zentralen Uhr geschieht im Bezugssystem von M' am gleichen Ort zur gleichen Zeit. Deswegen sind beide dasselbe Ereignis und, da Ereignisse eindeutig sind, müssen beide Lichtstrahlen in jedem Bezugssystem gleichzeitig bei der zentralen Uhr wiedereintreffen. Es gilt also

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 2t_X, \tag{2.4.5}$$

wo gemäss Abbildungen 2.2 und 2.3 t_X die Zeit ist, die das Licht für seinen Weg von der zentralen Uhr zum y-verschobenen Spiegel braucht. Δt_1 ist dann die Zeit, die das Licht für seine Bewegung von der zentralen Uhr zum x-verschobenen Spiegel braucht und Δt_2 die Zeit, die das Licht braucht, um wieder zurückzukommen. Man bezeichne die Querlänge als L und die parallele Länge des Stabes als L_x, dann gilt, im Bezugssystem von M, gemäss Gleichungen (2.4.5) und (2.3.8)

$$\frac{L_x}{c-v}+\frac{L_x}{c+v}=2\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{2.4.6}$$

und nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}(c-v)(c+v)$,

$$L_x=\frac{L}{\gamma}, \tag{2.4.7}$$

wo γ gemäss Gleichung (2.3.6) definiert ist. An diesem Beispiel sieht man die Längenkontraktion relativistisch!
Man berechne nun die Position von der x-verschobenen Uhr in Bezug auf die durch M gemessene Zeit. Man schreibe für ihre Position im M'-Bezugssystem $x' = L = \gamma L_x$ und im M-Bezugssystem x. Wegen der gleichförmigen Bewegung des Zuges gilt

$$L_x = x - vt \Rightarrow \tag{2.4.8}$$

$$x' = \gamma(x - vt). \tag{2.4.9}$$

Dies ist der x-Term der Lorentz-Transformation, sie gilt für alle Ereignisse in den Bezugssystemen M und M'. Man bemerke: Im nicht-relativistischen Fall gilt $\gamma \approx 1$ und dann nimmt Gleichung (2.4.9) die Form

$$x' \approx x - vt, \tag{2.4.10}$$

also genau die Galilei-Transformation, Gleichung (2.2.7).
Um die Zeit dieser Uhr festzusetzen, bedient sich M' der Einstein-Synchronisation. Er setzt also die Zeit von Ereignis E_1, die Reflexion des Lichtes bei der x-verschobenen Uhr, zur Zeit

$$t'_1 = \frac{t'_2}{2} \tag{2.4.11}$$

wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit fest. Dabei ist t'_2 die Zeit des Wiedereintreffens des Lichtes bei der zentralen Uhr und t'_1 die Zeit der Reflexion. Auf einer ähnlichen Weise gilt bei ihm für die Zeit des Ereignis E_2, das Wiedereintreffen des Lichtes bei der zentralen Uhr,

$$t'_2 = 2\frac{L}{c}. \tag{2.4.12}$$

Die Positionen der beiden Ereignisse sind jeweils $x'_1 = L$ und $x'_2 = 0$. Im Bezugssystem von M' dauert die Bewegung des Lichtes zum Spiegel-Uhr gleich lang wie

die Bewegung des Lichtes zurück. Nicht so im Bezugssystem von M, hier bewegen sich die Uhren, die sich im Zug befinden. Es muss aber möglich sein, um die Zeit, die die x-verschobene Uhr misst, in die Zeit von M umzurechnen. Man sucht dafür ein Transformationsgesetz.
Um die Lorentz-Transformation für t und t' herzuleiten, müssen folgende Eigenschaften beachtet werden: Da x' nicht nur von x, sondern auch von t abhängt, ist zu vermuten, dass t' auch von x abhängt. Zusätzlich muss die Transformation linear sein – wäre sie nicht linear, würde eine inertiale Bewegung in einem Bezugssystem eine beschleunigte in einem anderen Bezugssystem sein. Das kann nicht sein, da inertiale und beschleunigte Bezugssysteme sich stark unterscheiden: Beschleunigte Bezugssysteme messen fiktive Kräfte. Deswegen muss die Lorentz-Transformation folgende Form haben:

$$t' = Ax + Bt, \tag{2.4.13}$$

wo A und B zu bestimmende Konstanten sind. Um diese herzuleiten, betrachte man die Zeit, welche von der x-verschobenen Uhr gemessen wird.
Wegen der Zeitdilatation gemäss Gleichung (2.4.2) gilt für das Zeitintervall bis t_2

$$t_2' = \frac{t_2}{\gamma}. \tag{2.4.14}$$

Ergo, nach Gleichung (2.4.11) gilt

$$t_1' = \frac{t_2}{2\gamma}. \tag{2.4.15}$$

Da sich während des Zeitintervalls die zentrale Uhr in die positive x-Richtung bewegt, verkürzt sich das Zeitintervall. Dabei gilt, wenn x_1 die Position der x-verschobenen Uhr zum Zeitpunkt t_1 ist,

$$ct_2 = 2x_1 - vt_2 \Rightarrow \tag{2.4.16}$$

$$t_2 = 2\frac{x_1}{c+v}. \tag{2.4.17}$$

Zusätzlich gilt, weil das Zeitintervall eine Lichtbahn misst,

$$x_1 = ct_1. \tag{2.4.18}$$

Die Zusammenführung der Gleichungen (2.4.18), (2.4.17), (2.4.15) und (2.3.6) ergibt

$$t_2 = 2\frac{t_1}{1+\frac{v}{c}}, \tag{2.4.19}$$

$$\begin{aligned} t_1' &= \frac{1}{\gamma}(\frac{t_1}{1+\frac{v}{c}}) = \\ &= \gamma(t_1 - \frac{v}{c}t_1) = \\ &= \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Die Rechtfertigung für den letzten Schritt ist im nicht-relativistischen Limes. Für $v/c \approx 0$ verschwindet der Term $-\gamma\frac{v}{c}t_1$, und im nicht-relativistischen Fall existiert kein x-Term in der Zeittransformation. Ausserdem sagt diese Formel die Zeitdilatation voraus, da für $x = vt$ die Gleichung

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = \\ &= \gamma(t - \frac{v^2}{c^2}t) = \\ &= \frac{1}{\gamma}t \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

gelten muss, was mit Gleichung (2.4.2) vollständig übereinstimmt.
Um zusammenzufassen, hat die Lorentz-Transformation folgende Form[2]:

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x), \tag{2.4.22a}$$

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{2.4.22b}$$

$$y' = y, \tag{2.4.22c}$$

$$z' = z. \tag{2.4.22d}$$

Jedes Ereignis E, das im Bezugssystem M die Koordinaten x, y, z und ct besitzt, besitzt im Bezugssystem M' die Koordinaten x', y', z' und ct' nach diesen Transformationsgesetzen. Die Lorentz-Transformationen gelten sogar für alle inertialen Bezugssysteme, welche ihre Ursprünge zur Zeit $t = 0$ an der gleichen räumlichen Position haben.
Wie transformiert man von M' zu M? Man beachte: Dieses Experiment könnte umgekehrt ausgeführt werden. Dafür müsste M' im Zug die unendliche Uhrenkette besitzen – M auf dem Perron würde das Experiment ruhend ausführen. Wegen

[2] In dieser Arbeit werden nur diejenige Transformationen, die zwischen entlang einer Achse bewegten Bezugssystemen transformieren, Lorentz-Transformationen genannt. In der Literatur werden solche Transformationen als Lorentz-Boosts bezeichnet [8].

dem ersten Postulat und der Isotropie des Raumes müssen genau dieselbe Transformationsgesetze gelten, nur mit

$$v' = -v. \tag{2.4.23}$$

Deswegen ist, für die umgekehrte Lorentz-Transformation,

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'), \tag{2.4.24a}$$
$$x = \gamma(x' + vt'), \tag{2.4.24b}$$
$$y = y', \tag{2.4.24c}$$
$$z = z'. \tag{2.4.24d}$$

2.4.2 Letzte Begriffe

Wie vorher erwähnt, hat die zeitliche Koordinate t nicht dieselben Einheiten wie die räumlichen Koordinaten x, y und z. Deswegen wird die Zeitachse um einen Faktor c, welcher Einheiten der Geschwindigkeit hat, gestaucht. Die Lichtgeschwindigkeit ist hier sehr nützlich als Faktor, da dadurch die Lorentz-Transformation eine kompaktere Form annimmt. Es gilt

$$\beta = \frac{v}{c}, \tag{2.4.25}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.4.26}$$

mit diesen Definitionen ist Gleichung (2.4.22) ausgedrückt als

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \tag{2.4.27a}$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct), \tag{2.4.27b}$$
$$y' = y, \tag{2.4.27c}$$
$$z' = z. \tag{2.4.27d}$$

Die Definition der auf diese Weise gestauchten Zeitachse ist nutzbar zur Definition des *invarianten Vierer-Abstandes*. Da die Zeit- und Raumachsen durch die Lorentz-Transformation stark verzerrt werden, ist es für Problemstellungen nützlich, sich eines Wertes bewusst zu sein, der in allen Bezugssystemen konstant bleibt. Dieser Wert, der Vierer-Abstand zwischen zwei Ereignissen, E_1 und E_2, beträgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit[3]

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \tag{2.4.28}$$

[3] Je nach Konvention sind die Vorzeichen umgekehrt.

wo immer die koordinatenweise Differenz zwischen zwei Ereignissen genommen wird. Dieser Wert bleibt unter Anwendung der Lorentz-Transformation konstant. Falls Δs^2 grösser als 0 ist, spricht man von einem *zeitartigen* Intervall. Für solche Ereignisse kann man eine Uhr konstruieren, welche sich gleichförmig vom ersten zum zweiten Ereignis mit Geschwindigkeit $v < c$ bewegt. Die Eigenzeit dieser Uhr, also die Zeit, welche sie anzeigt, ist

$$\tau = \sqrt{\Delta s^2}. \tag{2.4.29}$$

Falls Δs^2 gleich 0 ist, so ist es *lichtartig*. Ein Photon kann sich von E_1 zu E_2 bewegen. Ist der Abstand kleiner als 0, so ist es *raumartig* und ein Betrachter kann konstruiert werden, für den beide Ereignisse gleichzeitig geschehen. Für diesen ist dann $\sqrt{-\Delta s^2}$ eine Eigenlänge – die Ereignisse unterscheiden sich nur räumlich und die gleichzeitige Messung zweier räumlich entfernter Punkte ist eine Längenmessung.

Die Ereignisse können als Vektoren konstruiert werden.

$$\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \tag{2.4.30}$$

Hier werden fettgedruckte Buchstaben für Vierer-Vektoren verwendet. Diese sind Vektoren mit vier Komponenten, eine für jede Dimension der Raumzeit, welche in diesem Fall die Position und Zeit eines Ereignisses beschreiben. Der Betrag dieses Vektors ist, analog zum 3-dimensionalen Raum, der Abstand des dadurch beschriebenen Ereignisses zum Ursprung. Dieser Abstand wird jedoch nicht mit demselben Massstab gemessen wie ein Dreier-Vektor. Stattdessen gilt, dass der Betrag des Vektors dessen invarianter Vierer-Abstand zum Ursprung ist. Dies kann geschrieben werden als

$$|\mathbf{E_1}|^2 = \mathbf{E_1} \cdot \eta \mathbf{E_1}, \tag{2.4.31}$$

wo die Operation $\cdot$ das skalare Produkt des euklidischen Raumes ist, und

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.4.32}$$

Dieses η ist der metrische Tensor und er hat eine spezielle Bedeutung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Dort nehmen die Komponenten von η nicht nur die

Werte 0, 1 und −1, sondern beliebige an; diese Werte können sogar Funktionen der Koordinaten sein.
Zudem nehmen die Lorentz-Transformationen eine Matrix-Form an. Man schreibt

$$\mathbf{E}_1' = \Lambda(\beta)\mathbf{E}_1, \text{ wo} \tag{2.4.33}$$

$$\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.4.34}$$

In dieser Matrix ist ersichtlich, dass die y- und z-Achsen keinen Bezug zu den Transformationen der x- und ct-Achsen haben. Natürlich gilt diese Transformation nur im Fall, dass die Richtung der Geschwindigkeit zur positiven x-Achse parallel ist und sich beide Betrachter zur Zeit $t = 0$ an der Position $x = 0$ befinden.

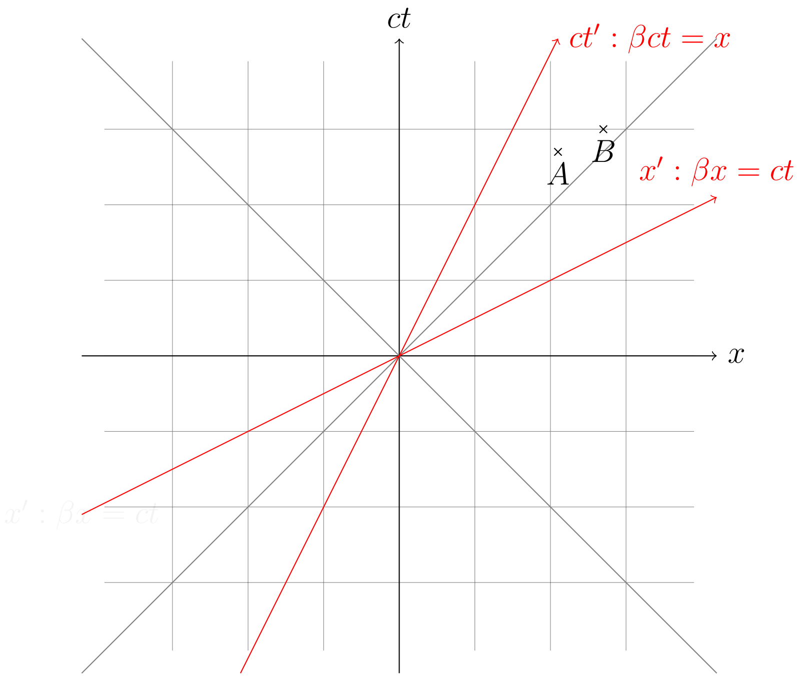

Abbildung 2.5: *Ein einfaches Minkowski-Diagramm, mit zwei markierten ungleichzeitigen Ereignissen, A und B. Die Koordinatenachsen des ruhenden Betrachters sind schwarz mit einem grauen Hilfsgitter eingezeichnet. Zwei graue Linien verlaufen zwischen den Achsen – diese sind Photon-Weltlinien. Ein zweiter Betrachter (rot) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit β, seine Koordinatenachsen sind rot eingezeichnet. Für diesen geschehen die Ereignisse A und B gleichzeitig, da die Strecke zwischen den zwei Punkten zur Gleichzeitigkeitsachse x' parallel ist.*

Die vier-Dimensionale Raumzeit kann auch graphisch dargestellt werden. Die t-

Achse ist um den Faktor c gestaucht. Dies ist dem Faktor c in den vorherigen Berechnungen zu bedanken und hilft zudem auch bei der Übersicht. Wäre die Achse nicht gestaucht, so würden die Bewegungen aller Objekte nahezu wie vertikale Linien aussehen. Die aufgezeichneten Bewegungen von Objekten werden als *Weltlinien* bezeichnet. Wegen dem Faktor c sieht man auf dem Diagramm die Weltlinien von zwei Photonen, die in entgegengesetzte Richtungen durch den Ursprung gehen, als zwei senkrechte Geraden.

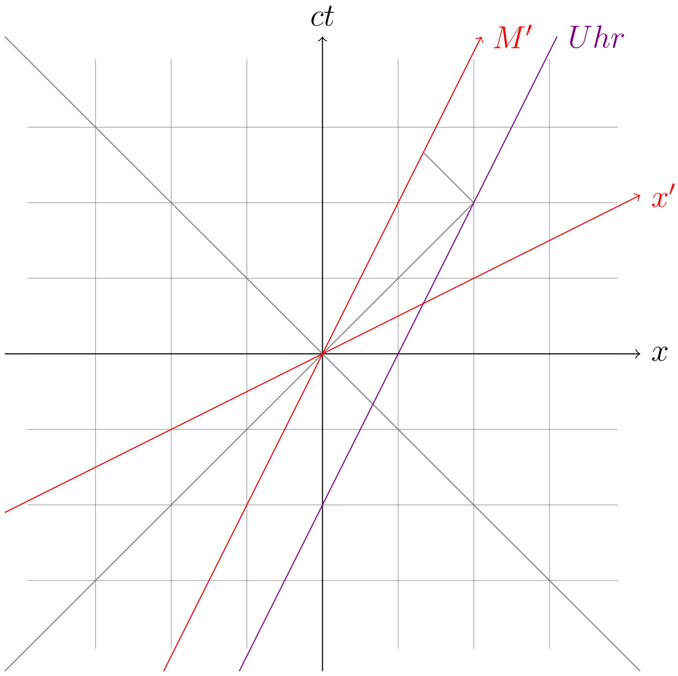

Abbildung 2.6: *Das Minkowski-Diagramm des relativistischen Michelson-Morley-Experiments. Ein Lichtstrahl (grau) wird vom Ursprung aus versandt, und trifft einen bewegten Spiegel (violett). Das Licht wird dann reflektiert, sodass der bewegte Betrachter M' (rot) es wieder auffängt.*

Die Bezugssysteme anderer Betrachter können auch auf dem Diagramm dargestellt werden. Dafür behandle man die Lorentz-Transformationen als Funktionen. Für die sogenannte Gleichzeitigkeitsachse, wo $ct' = 0$, gilt mit Gleichung (2.4.27)

$$\beta x = ct. \tag{2.4.35}$$

Auf dem Diagramm ist diese Achse mit x' annotiert, da auf dieser Achse parallele Distanzen vom bewegten Betrachter gemessen werden können. Für die Position des bewegten Betrachters ($x' = 0$) gilt

$$\beta ct = x. \tag{2.4.36}$$

Diese Minkowski-Diagramme sind sehr hilfreich, um Gedankenexperimente der speziellen Relativität zu erklären. Als Beispiel ist in Abbildung 2.6 die lotrechte Achse des relativistischen Michelson-Morley-Experiments dargestellt.

2.5 Die Überlichtgeschwindigkeitsbewegung

2.5.1 Die Kausalität unter Galilei-Transformationen

Beim Gedankenexperiment in diesem Kapitel handelt es sich um eine abgeänderte Form des Gedankenexperiments unter [18] und [2]. Nur der Aufbau wurde von diesen Quellen inspiriert, die Gedankengänge sind stets eigene.

Postulat 1. *Die Gesetze der Physik haben in jedem inertialen Bezugssystem dieselbe Form.*

Einstein verfasste sein erstes Postulat im Jahr 1905 [5]. Die «Gesetze der Physik» umfassen eine grosse Anzahl üblicherweise als Gleichung formulierter Sachverhältnisse. Dennoch existieren weitere fundamentale Gesetze, die auch nach dem ersten Postulat in jedem Bezugssystem gelten müssen. Darunter befinden sich die Kausalität und der Pfeil der Zeit. Die Kausalität ist die Verbindung zwischen Ursachen und Wirkungen. Eine Beziehung ist kausal unter dem folgenden Gesetz: Genau dann wenn Ereignis C passiert, passiert Ereignis E. C verursacht also E [3, p. 47]. Das Abfeuern eines Pfeils verursacht kausal eine Bewegung des Pfeils, weil dies in jedem Fall aufgrund des Abfeuerns auftritt. Nach diesem Gesetz ist die Kausalität binär. Entweder verursacht C E oder es tut dies nicht.
Hier wird ein *mikroskopischer Pfeil der Zeit* definiert. Dies gibt vor, dass Ursachen immer vor oder gleichzeitig mit ihren Wirkungen geschehen. Somit liegt eine absolute Richtung des Zeitflusses, aber kein absoluter Zeitfluss vor. Dieses Gesetz gilt, weil ohne einen Pfeil der Zeit ein Ereignis E ein weiteres Ereignis C in der Vergangenheit verursachen könnte, welches seinerseits Ereignis E verhindern könnte. Dies wäre ein Verstoss gegen die Kausalität, da Ereignisse sich selbst nicht verhindern dürfen. Die Begriffe der Kausalität und des Pfeils der Zeit sind fundamental für grosse Teile der Physik [13]. Ohne Kausalität hat es keinen Zusammenhang zwischen Messung und Gesetz. Ohne Kausalität ist das Universum eine Reihe spontaner, unzusammenhängender Ereignisse. In einem solchen Universum ist Physik unmöglich, da Ursachen und Wirkungen nicht beschrieben werden können. In der Physik von Newton und Galilei entstehen mit dem mikroskopischen Pfeil der Zeit keinerlei Probleme, da der Zeitfluss hier absolut ist. Zwei Ereignisse geschehen immer in einer festen Reihenfolge. Ein Pfeil wird in jedem Bezugssystem abgefeuert, und trifft in jedem Bezugssystem erst nachher die Scheibe.
Nicht so in der Relativitätstheorie – hier können, aufgrund der Relativität der Gleichzeitigkeit, zwei Ereignisse A und B in einem Bezugssystem in der Reihenfolge «zuerst A, dann B» geschehen. In einem anderen kann es aber sein, dass die Reihenfolge umgekehrt ist und «zuerst B, dann A» gilt [15]!
Falls solche zwei Ereignisse A und B kausal zusammenhängen, besteht ein Widerspruch zwischen der speziellen Relativitätstheorie und der Kausalität (mit dem

Pfeil der Zeit). Objekt der Untersuchung sind also mögliche Einschränkungen der Kausalität in der speziellen Relativitätstheorie.
Man nehme an, ein Pfeil bewege sich zwischen zwei Ereignissen: A sei das Abfeuern des Pfeils und B das Auftreffen des Pfeils auf der Scheibe. Untersuche man nun das Verhältnis dieser Ereignisse A und B. Es werden zwei Betrachter, O und O', konstruiert, von welchen sich O' mit der Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ relativ zu O fortbewegt[1]. In einem Bezugssystem, dem Bezugssystem von O, geschieht A zuerst, und erst danach B. Im Bezugssystem von O' geschehen die Ereignisse in der umgekehrten Reihenfolge. Mathematisch gilt

$$x_A < x_B, \tag{2.5.1}$$
$$t_A < t_B, \tag{2.5.2}$$
$$x'_A < x'_B, \tag{2.5.3}$$
$$t'_A > t'_B, \tag{2.5.4}$$

wo die räumlichen Positionen der Ereignisse im Bezugssystem von O jeweils (x_A, 0, 0) und (x_B, 0, 0) betragen. Die Koordinaten mit dem Hochstrich ($'$) bezeichnen dieselben Ereignisse, aber diese werden von O' gemessen. Die Zeiten werden jeweils mit relativ ruhenden Uhren gemessen, wie in Abschnitt 2.4.1 beschrieben. Man vergleiche Abbildung 2.7
Untersuchungsobjekt ist nun, in welchen Situationen die oben aufgeführten Bedingungen gelten können.
Aus der Lorentz-Transformation wird die von O' gemessene Zeit in die von O gemessene Zeit transformiert gemäss Gleichung (2.4.27). Es gilt:

$$t'_A > t'_B, \tag{2.5.5}$$
$$\gamma(ct_A - \beta x_A) > \gamma(ct_B - \beta x_B). \tag{2.5.6}$$

Nach Umformen gilt

$$\frac{ct_B - ct_A}{x_B - x_A} < \beta. \tag{2.5.7}$$

Es ist also in der speziellen Relativitätstheorie, wie oben behauptet, möglich, dass je nach Betrachter die Reihenfolge von Ereignissen umgekehrt sein kann!
Unter der Bezeichnung von α als Geschwindigkeit des theoretischen Pfeils, welcher sich von Ereignis A (Abfeuern) zu Ereignis B (Auftreffen auf der Scheibe) bewegt,

[1] In diesem Abschnitt werden ausschliesslich auf diese Art um die Lichtgeschwindigkeit normalisierte Geschwindigkeiten betrachtet. Der Einfachheit halber werden diese hier als «Geschwindigkeit» bezeichnet.

gilt

$$\alpha > \frac{1}{\beta}, \text{ wo} \tag{2.5.8}$$

$$\alpha = \frac{x_B - x_A}{ct_B - ct_A}. \tag{2.5.9}$$

Für $\beta = 0$ muss die Geschwindigkeit unendlich gross sein. Je grösser β wird, desto kleiner darf α sein. Falls der Wert von β eine obere Schranke besitzt, so hat der Wert von α eine untere Schranke – die Kausalität wird also nur in denjenigen Situationen verletzt, in denen sich ein Objekt schneller als eine bestimmte Geschwindigkeit $\frac{1}{\beta}$ bewegt.

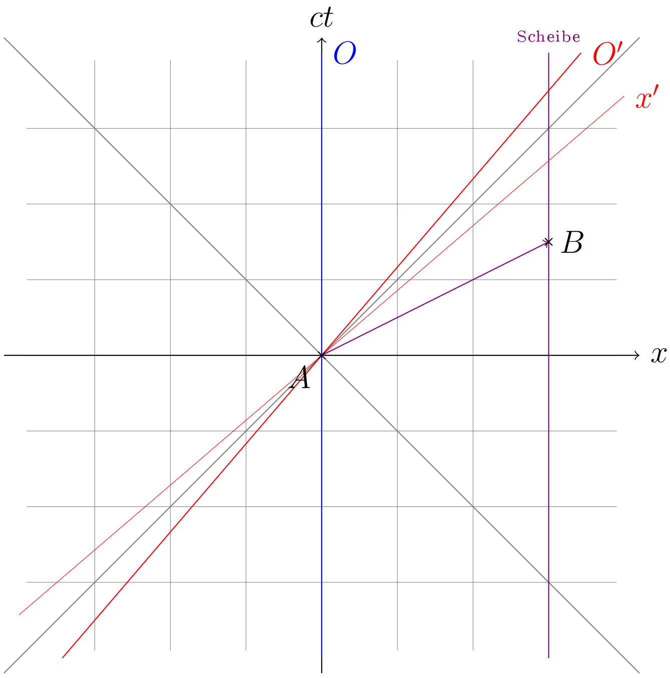

Abbildung 2.7: *Minkowski-Diagramm, welcher eine lila Weltlinie vom Ereignis A zu Ereignis B darstellt. Ein Betrachter (O', rot) bewegt sich in Richtung der Ereignis B, seine Gleichzeitigkeitsachse ist dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass für diesen Betrachter die lila Weltlinie die «Scheibe» bei $t' < 0$ und den Ursprung bei $t' = 0$ kreuzt. Deswegen geschieht für ihn zuerst B und dann A. Für den Betrachter O ist diese Reihenfolge umgekehrt, A geschieht vor B.*

2.5.2 Die maximal mögliche Geschwindigkeit eines Betrachters

Man betrachte die Postulate der speziellen Relativität:

Postulat 1. *Die Gesetze der Physik haben in jedem inertialen Bezugssystem dieselbe Form.*

Postulat 2. *Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in jedem inertialen Bezugssystem denselben Wert.*

Damit das erste Postulat gilt, müssen alle Ereignisse, die in einem inertialen Bezugssystem geschehen, in allen anderen inertialen Bezugssystemen auch geschehen. Im Falle, dass sich der Betrachter K' mit $\beta \geq 1$ (also $v \geq c$) bewegt, ist dies aber nicht der Fall. Versendet Betrachter K nämlich einen Lichtpuls, so existiert ein Ereignis – das Auftreffen des Lichtes beim Betrachter K' – das nur in einem Bezugssystem geschieht. K' sieht nämlich, dem zweiten Postulat folgend, den Lichtpuls mit der Geschwindigkeit c auf ihn zukommen. Da sich K' im eigenen Bezugssystem nicht bewegt, muss ihn das Licht nach einer gewissen Zeit erreichen. Betrachter K nimmt aber die Fortbewegung von K' schneller als (oder gleich schnell wie) den Lichtpuls wahr – in diesem System erreicht der Lichtpuls K' nie. Deswegen ist in der Relativitätstheorie ausgeschlossen, dass sich ein Betrachter schneller oder gleich schnell als die Lichtgeschwindigkeit bewegt. Es gilt immer:

$$\beta < 1. \tag{2.5.10}$$

Für das Beispiel des Pfeils bedeutet dies nach Gleichung (2.5.8), dass

$$\alpha \geq 1. \tag{2.5.11}$$

Das bedeutet, die Umkehrung der Reihenfolge von Ereignissen kann genau dann geschehen, wenn sie ein raumartiges Intervall besitzen. Man bemerke bei der obigen Gleichung, dass nach Gleichung (2.5.10)

$$\alpha < 1 \tag{2.5.12}$$

gilt, da ein Betrachter nur ein inertial bewegtes Objekt ist. Das heisst, eine solche Bewegung eines Pfeiles muss gleichzeitig schneller und langsamer als die Lichtgeschwindigkeit sein. Wegen der offenbaren Unmöglichkeit deren besteht also kein Widerspruch zwischen der Kausalität und der speziellen Relativitätstheorie.

Dennoch kann man sich fragen, ob der Pfeil dem Gesetz (2.5.10) folgen muss. Wäre er zum Beispiel beschleunigt, fänden die Postulate der speziellen Relativität keine Anwendung. Es wurde in diesem Abschnitt Aussagen über inertial bewegte Punkte gemacht – es wird aber nach einem allgemeinen Satz über die Raumzeit gesucht.

2.5.3 Das tachyonische Bogenduell

Um auch eine nicht-inertiale tachyonische[2] Bewegung auszuschliessen, muss ein weiterer Fall in Betracht gezogen werden. Dafür stelle man sich ein Bogenduell

[2] altgr. *takhús* = schnell; ein Tachyon ist also ein Teilchen, welches sich schneller als die Lichtgeschwindigkeit fortbewegt.

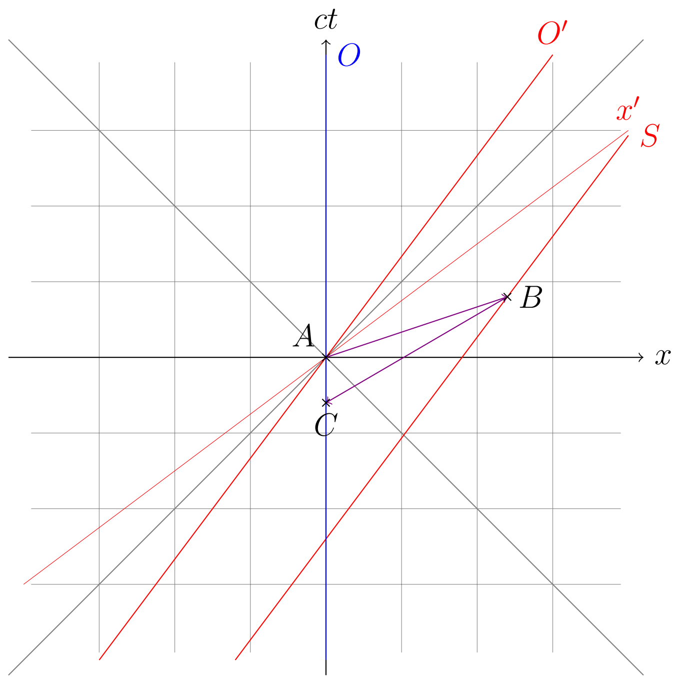

Abbildung 2.8: *Minkowski-Diagramm des tachyonischen Bogenduells: Betrachter O und O' sowie Schütze S und die Gleichzeitigkeitsachse von O' sind eingezeichnet. Zur Zeit $t = 0$ feuert O einen (violetten) Pfeil ab, der vor $t' = 0$ bei S ankommt. Zum diesem Zeitpunkt feuert dieser einen weiteren Pfeil ab, der vor $t = 0$ bei O ankommt.*

vor. Es befinden sich Betrachter O und Schütze S in einem Bogenduell. Schütze S ruht im Bezugssystem von Betrachter O' an der Position x'_B, bewegt sich also im Bezugssystem von Betrachter O in die positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit β. Die Geschwindigkeit der Bewegung von O', β, ist beliebig, solange sie kleiner als 1 ist.
Zum Zeitpunkt $t_A = 0$, als O und O' sich an der gleichen Position befinden, feuert O einen Pfeil in Richtung des Schützen S ab. Der Pfeil fliegt nicht-inertial, aber seine Durchschnittsgeschwindigkeit α ist, im Bezugssystem von O gemessen, immer grösser als 1. Die Bewegung des Pfeils kann im Bezugssystem von O durch eine inertiale Bewegung mit Geschwindigkeit α angenähert werden. Zum Zeitpunkt ct_B hat der Pfeil dieselbe Position wie S. Zum selben Zeitpunkt (durch den ersten Pfeil verursacht) feuert S einen Pfeil mit einem Bogen, der dem von O identisch ist, ab. Die Aufstellung ist in Abbildung 2.8 abgebildet. Da die beiden Bögen genau gleich geschaffen sind und anhand des ersten Postulats kein Experiment eine absolute Bewegung nachweisen kann, muss der Pfeil von S in seinem Bezugssystem dieselbe Bewegung wie der Pfeil von O erfahren. Daraus setze man die Durchschnittsgeschwindigkeit des Pfeils von S, α' im Bezugssystem von O' gemessen, auch grösser

als 1; es gilt dieselbe Annäherung für die Bewegung des Pfeils als inertiale Bewegung[3]. Zum Zeitpunkt ct'_C trifft der Pfeil von S O. Die Pfeile sind klein, können also wie Punkte behandelt werden.
Aufgrund der vorherigen Beschreibungen gilt einerseits

$$ct_B = \frac{x_B}{\alpha}, \tag{2.5.13}$$

andererseits wird β so gross gesetzt, dass Gleichung (2.5.8) gilt. Man setze

$$\frac{1}{\alpha} = \beta - \mathrm{d}\alpha. \tag{2.5.14}$$

Um ct'_B zu ermitteln, bedient man sich der Lorentz-Transformation gemäss Gleichung (2.4.27); es gilt

$$ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B). \tag{2.5.15}$$

Nun, nach Einsetzen von Gleichungen (2.5.14) und (2.5.9) mit $ct_A = x_A = 0$, nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$ct'_B = -\gamma x_B \, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.5.16}$$

Dieser Wert ist offenbar negativ. Das heisst, im Bezugssystem von O' ist der Schütze getroffen worden, bevor O seinen Pfeil abgeschossen hat. Das steht in Widerspruch zum Pfeil der Zeit. Diese in Widerspruch zum alltäglichen Verständnis der Physik stehende Schlussfolgerung führt nur zu absurderen Schlussfolgerungen – schiesst der Schütze S im selben Moment ct'_B sein Pfeil ab, fliegt er auch in seinem Bezugssystem mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $\alpha' > 1$. Da β beliebig ist, kann dafür ein Wert genommen werden, welcher sehr nahe 1 ist. In diesem Fall gilt für α, analog zu Gleichung (2.5.14),

$$\frac{1}{\alpha'} = \beta - \mathrm{d}\alpha' \tag{2.5.17}$$

für beliebiges $\mathrm{d}\alpha'$. In dem Moment, in dem der Pfeil von S O trifft, ct'_C also, beträgt die durch den Pfeil zurückgelegte Strecke zwischen S und O

$$l = x'_B - x'_C, \tag{2.5.18}$$
$$x'_C = -\beta ct'_C. \tag{2.5.19}$$

[3] Eigentlich sollten α und α' näherungsweise gleich sein, da aber die Bewegungen unterschiedlich lang sind und die Bewegung beschleunigt ist, unterscheiden sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten. Die genauen Werte der zwei Durchschnittsgeschwindigkeiten sind für den Beweis irrelevant, solange sie grösser 1 sind.

α' beschreibt die Bewegung des Pfeils entlang dieser Strecke, also ist

$$\alpha' = \frac{l}{ct'_C - ct'_B}. \tag{2.5.20}$$

In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} ct'_C &= \frac{l}{\alpha'} + ct'_B = \\ &= \frac{l}{\alpha'} - \gamma x_B \, \mathrm{d}\alpha. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Unter gleichbleibendem α und α' ist der Subtrahend proportional zu γ, während der Minuend linear in β ist. Daraus folgt, dass unter steigendem β die Differenz, ct'_C, negativ wird. Da β beliebig bestimmt wird (solange es gross genug ist, dass Gleichung (2.5.8) gilt), gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$ct'_C < 0. \tag{2.5.22}$$

Unter einer inversen Lorentz-Transformation gemäss Gleichung (2.4.24) gilt

$$ct_C = \gamma(ct'_C - \beta x'_C). \tag{2.5.23}$$

Man setze Gleichung (2.5.19) ein, es gilt

$$\begin{aligned} ct_C &= \gamma(ct'_C - \beta^2 ct'_C) = \\ &= \frac{1}{\gamma} ct'_C. \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Mit Gleichung (2.5.22) ist

$$ct_C < 0. \tag{2.5.25}$$

Das bedeutet, O ist vom Pfeil von S getroffen worden, bevor er seinen eigenen abgefeuert hat. Dies widerspricht der Kausalität: Eine Ursache kann sich selbst nicht verhindern!
Es befindet sich also unter den Annahmen ein Widerspruch. Entweder hat es eine Asymmetrie in der Aufstellung des Experiments, β kann nicht beliebig gross gewählt werden, oder kein Objekt darf sich mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit grösser als die Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die erste Annahme kann nicht verworfen werden, da das Gedankenexperiment symmetrisch aufgestellt wurde und das erste Postulat den Nachweis einer absoluten Bewegung verbietet. Die zweite Annahme darf auch nicht verworfen werden; Objekte mit sehr hohen Geschwindigkeiten werden oft im Weltall observiert [1]. Es muss also die dritte Annahme

verworfen werden: Es darf sich kein Objekt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit grösser als die Lichtgeschwindigkeit bewegen. Da Bewegungen kontinuierlich sind, gilt dies auch für beliebig kleine Abschnitte von Bewegungen. Das heisst, die Lichtgeschwindigkeit ist ein universelles Tempolimit, das alle Bewegungen eine maximale Geschwindigkeit verleiht.
Bemerkenswert ist dabei, dass die Postulate der speziellen Relativität nur Aussagen über die Bewegung von Bezugssystemen und des Lichtes machen. Dennoch kann man aus diesen Postulaten heraus solche universell gültige Aussagen über die Bewegung aller Objekte machen. Grund dafür ist, dass die Postulate der speziellen Relativität die Struktur der Raumzeit einschränken. Die Raumzeit ist also unterteilt: Ereignisse, die raumartig voneinander entfernt sind, können gar keinen kausalen Einfluss aufeinander haben; dem zugrunde liegt die Umkehrung der Reihenfolge dieser zwei Ereignisse in einem bewegten Bezugssystem. Dieser Effekt kann durch die Lorentz-Transformation bewiesen werden, welche aus den zwei Postulaten gezeigt werden kann (vgl. 2.4.1). Auf diese Weise schränken die Postulate also die kausale Struktur der Raumzeit ein. Die Kausalität kann sich schnellstens mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.
Man kann sich also vorstellen, vom Ursprung aus werde ein Lichtpuls in alle Richtungen versandt. Wenn man in einem dreidimensionalen Diagramm ct, x und y für den Lichtpuls darstellt entspricht dessen Bewegung ein Kegel. Der sogenannte *Lichtkegel* stellt die Struktur der Raumzeit bildlich dar. Innerhalb des Kegels gibt es eine Vergangenheit und eine Zukunft, die einen kausalen Einfluss aufeinander haben können. Ausserhalb des Kegels kann es keinen kausalen Einfluss vom Ursprung aus geben. Die kausale Struktur der Raumzeit ist ein Kegel, der die Grenzen des kausalen Einflusses definiert.

2.6 Die Thomas-Rotation

In den bisherigen Überlegungen wurde ein physikalisches Prinzip angenommen, dessen Gültigkeit weiterer Untersuchungen bedarf. Es heisst das Prinzip der Geschwindigkeitsreziprozität:

Prinzip. *Wenn ein Objekt K' im Bezugssystem von K eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ besitzt, besitzt K im Bezugssystem von K' eine Geschwindigkeit $\vec{v}\,' = -\vec{v}$.*

Dies trifft genau dann zu, wenn K und K' parallele Koordinatenachsen besitzen. Qualitativ folgt es aus dem ersten Postulat: Es gäbe sonst einen Unterschied zwischen einem bewegten und einem unbewegten Koordinatensystem. Ausserdem wurde diese Annahme für viele bisherige Herleitungen in diesem Werk verwendet, siehe zum Beispiel Gleichung (2.4.23). Jeder Widerspruch, der daraus entstehen könnte, bedürfe einer Wiedererfassung der gesamten Theorie.
Oberflächlich ist das Prinzip selbstverständlich. Bei genauer Betrachtung entsteht ein Konflikt mit der relativistischen Geschwindigkeitsaddition.

2.6.1 Der Orientierungslauf

Es befinden sich zwei Orientierungsläufer, Petra (P) und Quentin (Q) zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ursprung. Nach dem Startschuss rennt Petra mit der Geschwindigkeit β_P in positiver y-Richtung. Quentin rennt mit der Geschwindigkeit β_Q in positiver x-Richtung. Am Ursprung befindet sich ein weiterer Betrachter, Station O, welcher die Geschwindigkeiten misst. Die Koordinatenachsen der zwei Läufer sind parallel zu denjenigen von O, weshalb zum Beispiel Petra für O eine Geschwindigkeit $-\beta_P$ in y-Richtung misst.

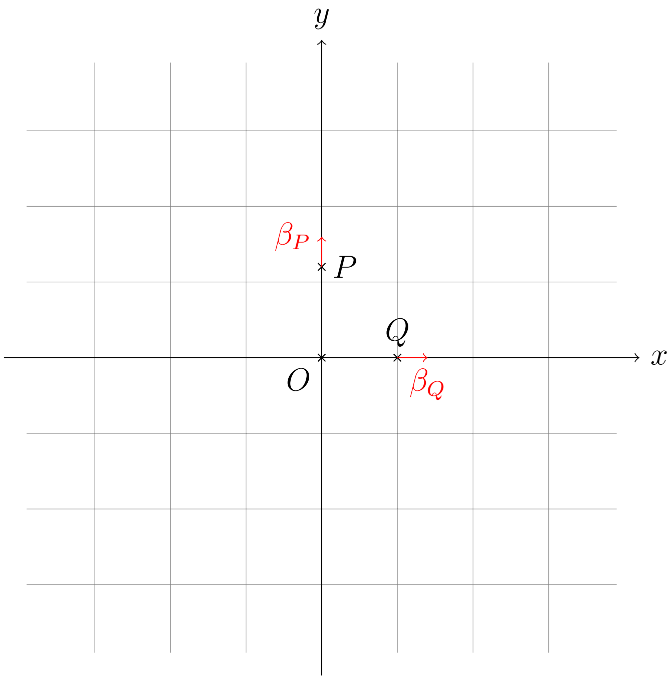

Abbildung 2.9: *x- und y-Achse der Messtation O zu einem bestimmten Zeitpunkt, in welchem sich P und Q schon bewegt haben. Die Geschwindigkeiten von P und Q sind mit Pfeilen notiert.*

Die Koordinatenachsen von P sind also parallel zu denjenigen von O, und die von Q sind auch parallel zu denjenigen von O. Man nehme davon intuitiv an, dass die Achsen von P und Q zueinander auch parallel sind.
Alle in diesem Kapitel aufgeführten Vektoren haben nur eine x-Komponente und eine y-Komponente. Die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{\beta}$ sind um den Faktor c skaliert, also

$$c\vec{\beta_Q} = \vec{v_Q}. \tag{2.6.1}$$

Man betrachte nun Quentins Bewegung aus der Sicht von Petra. Unter den Galilei-Transformationen bewegt sich dieser mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\begin{aligned} \vec{\beta_Q}' &= \vec{\beta_P} - \vec{\beta_Q} = \\ &= \begin{bmatrix} \beta_P \\ -\beta_Q \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Hier wird eine Notation definiert: Alle Variablen, die P misst, sind mit einem einzigen Hochstrich versehen. Alle Variablen, die von Q gemessen werden, sind mit zwei Hochstrichen versehen. Zu bemerken ist hier, dass die Bewegung x- und

y-Komponenten mit Beträgen grösser Null hat, was in der relativistischen Behandlung widerspiegelt werden sollte. Um die Bewegung von Quentin in Petras Bezugssystem zu beschreiben, muss die Definition der Geschwindigkeit in Betracht genommen werden. Für eine beliebige Bewegung $\vec{\beta}$ ist

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{c\,\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{c\,\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \tag{2.6.3}$$

per Definition der Geschwindigkeit.
Um Quentins Bewegung in Petras Bezugssystem zu beschreiben, muss diese Differentialrechnung transformiert werden. Da die Gesetze der Zeitdilatation und Längenkontraktion für Zeiträume beziehungsweise Strecken beliebiger Länge gelten, gelten sie auch für die infinitesimal kleine Längen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$. Da sich Petra in die positive y-Richtung bewegt, nehmen die Gesetze folgenden Form an:

$$c\,\mathrm{d}t' = \gamma_P c\,\mathrm{d}t \tag{2.6.4a}$$
$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x \tag{2.6.4b}$$
$$\mathrm{d}y' = \gamma_P\,\mathrm{d}y \tag{2.6.4c}$$

wo das Gesetz für die Längenkontraktion für $\mathrm{d}y$ in der umgekehrten Form vorliegt, da $\mathrm{d}y'$ im Bezugssystem P ruht. Es macht für die Messung einer Geschwindigkeit keinen Sinn, auch den Stab für die Längenmessung zu verschieben. Im Bezugssystem von O gilt folgendes über die Bewegung von Q:

$$\frac{\mathrm{d}x_Q}{c\,\mathrm{d}t} = \beta_Q, \tag{2.6.5a}$$
$$\frac{\mathrm{d}y_Q}{c\,\mathrm{d}t} = 0, \tag{2.6.5b}$$

worin die Koordinaten von Quentins Position mit Subskript-Q angegeben sind. Objekt der Untersuchung sind die Geschwindigkeiten in Petras Bezugssystem. Unter Anwendung der Lorentz-Transformation gilt folgendes für die Bewegungskomponente in x-Richtung, per Gleichung (2.6.4):

$$\frac{\mathrm{d}x'_Q}{c\,\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x_Q}{\gamma_P c\,\mathrm{d}t}. \tag{2.6.6}$$

Mit Gleichung (2.6.5) beträgt dies

$$\frac{\mathrm{d}x'_Q}{c\,\mathrm{d}t'} = \frac{\beta_Q}{\gamma_P}. \tag{2.6.7}$$

Ausserdem gilt für die Bewegungskomponente in y-Richtung, da Quentin immer dieselbe y-Koordinate wie Station O besitzt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y'_Q}{c\,\mathrm{d}t'} &= -\frac{\mathrm{d}y_P}{c\,\mathrm{d}t} = \\ &= -\beta_P,\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

wo die Geschwindigkeitsreziprozität auf Petras Bewegung verwendet wurde. Wenn unsere vorherige Annahmen alle stimmen, sollte Quentin für Petras Bewegung die Werte

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x''_P}{c\,\mathrm{d}t''} &= -\frac{\mathrm{d}x'_Q}{c\,\mathrm{d}t'} = \\ &= -\frac{\beta_Q}{\gamma_P},\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y''_P}{c\,\mathrm{d}t''} &= -\frac{\mathrm{d}x'_Q}{c\,\mathrm{d}t'} = \\ &= \beta_P\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

messen. Die Koordinaten mit zwei Hochstrichen ($''$) werden im Bezugssystem von Quentin gemessen; diejenigen mit nur einer im Bezugssystem von Petra. Ob die Bewegung von P im Bezugssystem Q tatsächlich diesem Gesetz folgt, wird nun überprüft.

Man führe mit derselben Methode wie vorher eine Bestimmung von Petras Bewegung in Quentins Bezugssystem. Dabei gilt, da sich Quentin in die positive x-Richtung bewegt:

$$c\,\mathrm{d}t'' = \gamma_Q c\,\mathrm{d}t, \tag{2.6.11a}$$

$$\mathrm{d}x'' = \gamma_Q\,\mathrm{d}x, \tag{2.6.11b}$$

$$\mathrm{d}y'' = \mathrm{d}y \tag{2.6.11c}$$

und für die P-Bewegung im O-Bezugssystem gilt

$$\frac{\mathrm{d}x_P}{c\,\mathrm{d}t} = 0, \tag{2.6.12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_P}{c\,\mathrm{d}t} = \beta_P, \tag{2.6.12b}$$

wo die Koordinaten mit Subskript-P andeuten, dass sie Petras Position beschreiben. Für Petras x-Koordinate genügt die Anwendung der Geschwindigkeitsreziprozität und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x''_P}{c\,\mathrm{d}t''} &= -\frac{\mathrm{d}x_Q}{c\,\mathrm{d}t} = \\ &= -\beta_Q.\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Dann, für die Bewegung in y-Richtung gilt, analog zu (2.6.6),

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y''_P}{c\,\mathrm{d}t''} &= \frac{\mathrm{d}y_P}{\gamma_Q c\,\mathrm{d}t} = \\ &= \frac{\beta_P}{\gamma_Q} \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

unter den Transformationsregeln (2.6.11).
Hier befindet sich ein Widerspruch! Einerseits müsste, nach dem Prinzip der Geschwindigkeitsreziprozität,

$$\begin{aligned} \vec{\beta_P}'' &= -\vec{\beta_Q}' = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\beta_Q}{\gamma_P} \\ \beta_P \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.6.15}$$

gelten; andererseits gilt

$$\vec{\beta_P}'' = \begin{bmatrix} -\beta_Q \\ \frac{\beta_P}{\gamma_Q} \end{bmatrix}. \tag{2.6.16}$$

Diese zwei Geschwindigkeiten haben im nicht-relativistischen Fall ungefähr gleiche Werte, dennoch sind sie verschieden. Dies bedeutet, eine der Annahmen muss verworfen werden. Aber welche? Eine Verletzung der Längenkontraktion oder der Zeitdilatation würde die vorherigen Herleitungen ganzheitlich widersprechen. Ein Modell der Relativität ohne Geschwindigkeitsreziprozität wäre aber wegen dem ersten Postulat unmöglich!
Noch nicht ist die Geschwindigkeitsreziprozität verloren. Man beachte die Beträge der einzelnen Vektoren:

$$|\beta''_P|^2 = \beta_Q^2 + \left(\frac{\beta_P}{\gamma_Q}\right)^2 \tag{2.6.17}$$

$$= \beta_Q^2 + \beta_P^2(\sqrt{1-\beta_Q^2})^2 \tag{2.6.18}$$

$$= \beta_P^2 + \beta_Q^2 - \beta_P^2\beta_Q^2 \tag{2.6.19}$$

$$= \beta_P^2 + \beta_Q^2(1-\beta_P^2) \tag{2.6.20}$$

$$= \beta_P^2 + \left(\frac{\beta_Q}{\gamma_P}\right)^2 \tag{2.6.21}$$

$$= \left|\beta'_Q\right|^2 \tag{2.6.22}$$

Die Vektoren haben gleiche Beträge! Dies deutet darauf hin, dass es doch sein könnte, dass das Prinzip der Geschwindigkeitsreziprozität noch Gültigkeit findet.

Tatsächlich kann dieser Effekt als Unterschied in den Koordinatensystemen von P und Q verstanden werden, welche nicht nur einer einfachen Lorentz-Transformation zuzuschreiben ist. Dieser Unterschied kann durch eine weitere Transformation der x, y und ct-Koordinaten beschrieben werden, doch welche?
Über die Koordinatentransformation weiss man, dass sie linear ist: ein Strahl (zum Beispiel die Bewegung von O) bleibt ein Strahl. Ausserdem bleiben die Längen von Vektoren gleich. Letztens hat es in der Transformation einen Fixpunkt, nämlich die räumliche Position des jeweiligen Betrachters bei (0,0,0). Vermutet wird daher, dass es sich um eine Rotation handelt.
Um zusammenzufassen, sind die Koordinatenachsen von Bezugssystem P und diejenigen von Bezugssystem Q nicht parallel, sondern sind zueinander rotiert. Dies geschieht, obwohl die Koordinatenachsen im Bezugssystem O alle parallel sind. Dieser scheinbare Widerspruch ist tatsächlich möglich, da eine Lorentz-Transformation zwar keine Rotation innehält, aber doch zwei nicht-kollineare Lorentz-Transformationen eine Rotation ergeben könnten. Zudem ist die spezielle Relativitätstheorie rotationssymmetrisch. Diese Rotation, die sich aus zweier Lorentz-Transformationen ergibt, wird in der Literatur als Thomas-Rotation bezeichnet [4].
Nun gilt es, die mathematische Grundlage der Rotation zu untersuchen. Der Einfachheit halber wird dies mit Referenzpunkten untersucht, die sich entlang den räumlichen Achsen der jeweiligen Betrachter bewegen. Man führe also zwei Referenzpunkte ein: R' bewegt sich im Bezugssystem von P mit Geschwindigkeit β_Q in die positive x-Richtung; R'' bewegt sich im Bezugssystem von Q mit Geschwindigkeit β_P in die positive y-Richtung. Deswegen gelten von P zu R' dieselben Transformationsgesetze wie von O zu Q; auf ähnlicher Weise gelten von Q zu R'' dieselben Gesetze wie von O zu P. Wenn die Koordinatenachsen von Q und P also parallel sind, sollten R' und R'' zu jedem Zeitpunkt derselbe Punkt sein.
Wenn R' und R'' derselbe Punkt sind, dann sollten ihre KoordinatenAchsen auch dieselben sein. Das heisst, von O zu R' gelten dieselben Transformationsgesetze wie von O zu R''. Nun behandle man die Lorentz-Transformationen als Vierdimensionale Matrizen. Für die Lorentz-Transformation zwischen den Koordinatensystemen

gilt, gemäss (2.4.34):

$$\begin{aligned}\Lambda_{O\to Q} &= \Lambda_{P\to R'} = \Lambda_1 = \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_Q & -\gamma_Q\beta_Q & 0 & 0 \\ -\gamma_Q\beta_Q & \gamma_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.6.23}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{O\to P} &= \Lambda_{Q\to R''} = \Lambda_2 = \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_P & 0 & -\gamma_P\beta_P & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_P\beta_P & 0 & \gamma_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.6.24}$$

Der Pfeil im Subskript bedeutet:

$$\vec{r}\,' = \Lambda_{O\to P}\vec{r}, \tag{2.6.25}$$

wo $\vec{r}\,'$ im Bezugssystem von P, $\vec{r}$ im Bezugssystem von O gemessen wird. Die Transformation von O nach R' (beziehungsweise R'') ist also eine wiederholte Lorentz-Transformation. Zuerst wird zum Bezugssystem der Läufer transformiert und erst danach zum Bezugssystem des Referenzpunktes. Deswegen gilt:

$$\Lambda_{O\to R'} = \Lambda_1\Lambda_2, \tag{2.6.26}$$

$$\Lambda_{O\to R''} = \Lambda_2\Lambda_1. \tag{2.6.27}$$

Falls R' und R'' gleich sind, so wären die beiden Transformationsmatrizen dieselben. Aber Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ! Es existiert also eine Matrix K, für welche

$$K = \Lambda_1\Lambda_2 - \Lambda_2\Lambda_1, \tag{2.6.28}$$

$$K \neq 0 \tag{2.6.29}$$

gilt. Die Matrix K, auch *Kommutator* zweier Lorentz-Transformationen, ist eine Kombination aus einem Lorentz-Transformation und einer Rotation [8]. Der Betrag der Vektoren $\vec{OR'}$ und $\vec{OR''}$ ist demnach derselbe. Die Vektoren sind zueinander rotiert – diese Rotation ist genau dieselbe wie die oben besprochene Rotation. Das gilt, weil die Transformation von Q zu P auch eine Komposition zweier Lorentz-Transformationen ist.
Die nicht-Kommutativität zweier Lorentz-Transformationen kann durch Analogie wie die nicht-Kommutativität zweier Rotationen dargestellt werden. Wenn man einen Quader auf der x- und dann auf der y-Achse rotiert, ist es nicht dasselbe,

wie wenn man einen Quader zuerst auf der y-, dann auf der x-Achse rotiert. Die Quader haben je nach Reihenfolge eine andere Lage. Dafür kann man, um von der Lage des ersten Quaders zur Lage des zweiten zu kommen, eine weitere Rotation durchführen – danach haben beide Quader dieselbe Lage. Man sagt, die Gruppe der Rotationen eines Quaders seien *geschlossen unter Komposition*. Die Gruppe der Lorentz-Transformationen ist offenbar nicht geschlossen unter Komposition – die Komposition von zwei solchen ergibt eine Lorentz-Transformation und eine Rotation.
Es existiert also scheinbar aufgrund der relativen Verzerrung der Raum- und Zeitachsen je nach Betrachter eine Beziehung zwischen Lorentz-Transformationen und Rotationen. Die in diesem Kapitel bewiesene Thomas-Rotation ist also eine Konsequenz der zwei Postulate Einsteins. Dieser Effekt tritt erst bei sehr grossen Geschwindigkeiten auf; es wurde vor der speziellen Relativitätstheorie nicht beobachtet. Mathematisch liegt der Beziehung zwischen Lorentz-Transformation und Rotation die nicht-Kommutativität zweier Matrix-Multiplikationen zugrunde. Das genaue Verhältnis geht über den Umfang der vorliegenden Untersuchung hinaus, eine Diskussion kann unter [8] gefunden werden. Dennoch wurde in diesem Abschnitt klar, dass die zwei Arten von Koordinatentransformationen miteinander verwandt sind.

Kapitel 3

Diskussion

In dieser Maturitätsarbeit wurden diverse Themen der speziellen Relativitätstheorie Einsteins in Betracht genommen und analysiert. Zuerst wurden die historischen Grundlagen aufbauend und systematisch betrachtet. Ein besonderer Fokus lag dabei auf die Vorläufertheorie der speziellen Relativität: die Lorentz'sche Äther-Theorie. Danach wurden die Lorentz-Transformationen mit einem Gedankenexperiment motiviert. Besondere Aufmerksamkeit galt dabei der Einstein-Synchronisierung. Während des Überlegens wurde klar, wie wichtig diese für die Entwicklung der Theorie durch Einstein gewesen war, sowie die überraschend grosse Aussagekraft dieser Synchronisierung in Kombination mit den Postulaten der speziellen Relativität. Mögliche Erweiterungen dieses Gedankenexperimentes wären eine andere Synchronisationskonvention, wo die Isotropie oder die Homogenität des Raumes nicht gilt.

Die tachyonische Bewegung wurde ebenfalls analysiert. Eine Fallunterscheidung war notwendig: die unbeschleunigte, inertiale Bewegung, welche durch das zweite Postulat ausgeschlossen wurde und die beschleunigte Bewegung. Ausserdem musste die Kausalität präzise definiert werden. Aus dem Gedankenexperiment wurden Schlüsse über die kausale Struktur der Raumzeit gezogen.

Zuletzt wurde die Thomas-Rotation betrachtet. Dieser Spezialfall ergab sich aus zwei nicht-kollinearen Lorentz-Transformationen. Die Anwendung dieser liess als Schluss ziehen, dass nicht-kollineare Lorentz-Transformationen nicht kommutativ sind – zwei Lorentz-Transformationen ergeben eine Lorentz-Transformation und eine Rotation. Daraus wurde geschlossen, dass es ein Verhältnis zwischen Lorentz-Transformationen und Rotationen gibt.

Anhang

Literatur

[1] D. J. Bird u. a. «Detection of a Cosmic Ray with Measured Energy Well beyond the Expected Spectral Cutoff due to Cosmic Microwave Radiation». Englisch. In: *The Astrophysical Journal* 441 (März 1995), S. 144. DOI: 10.1086/175344. arXiv: astro-ph/9410067 [astro-ph].

[2] David Bohm. *The special theory of relativity*. Englisch. Lecture notes and supplements in physics. New York: W.A. Benjamin, 1965.

[3] Mario Bunge. *Causality and modern science*. Englisch. 3. Dover classics of science and mathematics. New York: Dover Publications, Inc., 1979. ISBN: 0486237281.

[4] John P. Costella u. a. «The Thomas rotation». Englisch. In: *American Journal of Physics* 69.8 (Aug. 2001), S. 837–847. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.1371010. eprint: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/69/8/837/7529862/837_1_online.pdf. URL: https://doi.org/10.1119/1.1371010.

[5] Albert Einstein. «Zur Elektrodynamik bewegter Körper». In: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), S. 891–921. DOI: https://doi.org/10.1002/andp.19053221004. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053221004. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053221004.

[6] George Francis FitzGerald. «The Ether and the Earth's Atmosphere». Englisch. In: *Science*. Bd. 13. American Association for the Advancement of Science, 1889, S. 620. URL: https://www.biodiversitylibrary.org/item/98111.

[7] Peter Galison. *Einsteins Uhren, Poincarés Karten : die Arbeit an der Ordnung der Zeit*. Frankfurt am Main: S. Fischer, 2003. ISBN: 3100244303.

[8] Walter Greiner und Johann Rafelski. *Spezielle Relativitätstheorie*. Theoretische Physik. Verlag Harri Deutsch, 1992. ISBN: 3-8171-1205-X.

[9] Gerald James Holton. *Thematic origins of scientific thought : Kepler to Einstein*. Englisch. 1. Überarbeitete Auflage. Cambridge: Harvard University Press, 1988. ISBN: 06-7487-748-9.

[10] Max Jammer. *Das Problem des Raumes : die Entwicklung der Raumtheorien*. Sonderausgabe. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1960.

[11] J.-M. Lévy. «A simple derivation of the Lorentz transformation and of the accompanying velocity and acceleration changes». Englisch. In: *American Journal of Physics* 75.7 (Juli 2007), S. 615–618. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.2719700. eprint: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/75/7/615/13083785/615_1_online.pdf.

[12] W.D. McComb. *Dynamics and relativity*. Englisch. Oxford: Oxford University Press, 1999. ISBN: 0198501129.

[13] Wolfgang Pauli. «Raum, Zeit und Kausalität in der modernen Physik». In: *Physik und Erkenntnistheorie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1984, S. 64–75. ISBN: 978-3-322-88799-3. DOI: 10.1007/978-3-322-88799-3_10.

[14] Bureau International des Poids et Mesures. Französisch. 1983. DOI: 10.59161/cgpm1983res1e. URL: http://dx.doi.org/10.59161/CGPM1983RES1E.

[15] Tatsu Takeuchi. «Causality». Englisch. In: *An Illustrated Guide to Relativity*. Cambridge University Press, 2010, S. 120–129. DOI: 10.1017/CBO9780511779121.007.

[16] Richard Tolman. *The theory of the relativity of motion*. Englisch. 1917.

[17] Edmund T. Whittaker. *A history of the theories of aether and electricity*. Englisch. Erste. London: T. Nelson und Sons, 1951–1953.

[18] Wikipedia contributors. *Tachyonic antitelephone — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Englisch. [Online; accessed 6-October-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tachyonic_antitelephone&oldid=1167570937.

[19] Wikipedia contributors. *Wigner rotation — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Englisch. [Online; accessed 27-September-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wigner_rotation&oldid=1170098710.

Danksagung

Vielen Dank meiner Betreuungsperson, Dr. Helm, für seinen Rat sowie für das Zur-Verfügung-Stellen diverser Unterlagen. Vielen Dank denjenigen, die diese Arbeit vorläufig durchgelesen und auf Fehler überprüft haben: Henry Wetton, Sofia Sottnikova und Mateo Letunic.

Einhaltung rechtlicher Vorgaben

Ich habe die Arbeit selbstständig und unter Aufsicht meines Betreuers/meiner Betreuerin verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet.

Abschnitte, für deren Erstellung KI-Programme (bspw. ChatGPT) zum Einsatz kamen, habe ich allesamt offengelegt und mit einer entsprechenden Fussnote versehen. Meine Arbeit wird gegebenenfalls einer Prüfung bezüglich KI-Einsatz unterzogen; im Rahmen dieser Prüfung wird festgestellt, ob die Arbeit neben den angegebenen Stellen weitere von einer KI verfasste Elemente enthält.

Ich nehme zur Kenntnis, dass meine Arbeit zur Überprüfung der korrekten und vollständigen Angabe der Quellen mit Hilfe einer Software (eines Plagiaterkennungstools) geprüft wird. Zu meinem eigenen Schutz wird die Software auch dazu verwendet, später eingereichte Arbeiten mit meiner Arbeit elektronisch zu vergleichen und damit Abschriften und eine Verletzung meines Urheberrechts zu verhindern. Falls Verdacht besteht, dass mein Urheberrecht verletzt wurde, erkläre ich mich damit einverstanden, dass die Schulleitung meine Arbeit zu Prüfzwecken herausgibt.

19. Oktober 2023, Bruno Wetton